LÓGICA DE PROPOSICIONES

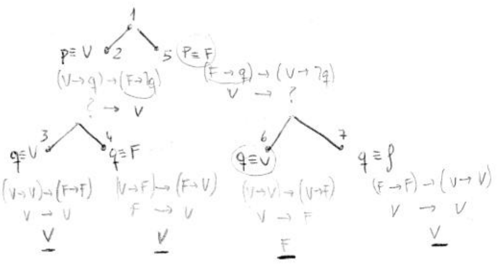
MÉTODOS PARA VALIDAR UNA PROPOSICIÓN: TABLA DE VERDAD | ÁRBOL SEMÁNTICO | REFUTACIÓN

Ej.: Verificar la validez de la sentencia: $S: (p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

<u>T. Verdad</u>

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$P_1 \to P_2$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

<u>Árbol semántico</u>



<u>Refutación</u>: suponer la proposición falsa y ver si ello constituye una contradicción.

$$\underbrace{(p \to q)}_{V} \xrightarrow{F} \underbrace{(\neg p \to \neg q)}_{F}$$

Para que S sea falsa, el antecedente ha de ser verdadero y el consecuente falso.
Para que el consecuente sea falso, ha de ser $\neg p$ verdadero y $\neg q$ falso, ha de ser por tanto p falso y q verdadero.
Si p es falso y q verdadero, el antecedente es verdadero y el consecuente falso. La refutación de S no es una contradicción, por tanto S no es tautología.

MÉTODOS PARA VALIDAR UN RAZONAMIENTO: PPIO DE RESOLUCIÓN DE ROBINSON SOBRE FORMAS CLAUSULADAS.

<u>Forma clausulada</u>:

1) Eliminar condicionales
2) Eliminar negaciones (Morgan)
3) Aplicar p. distributiva.

Literal: variable proposicional sola o negada. L_1
Cláusula: colección de disyunción de literales. $L_1 \vee L_2 \vee L_3$
F. Clausulada: colección de conjunción de cláusulas. $(L_1 \vee L_2) \wedge (L_2 \vee L_3)$

<u>Regla de Resolución</u>

$G1: \neg p \vee q \vee r$
$G2: \neg q \vee s$

$R: \neg p \vee r \vee s$

R es consecuencia lógica de G_1, G_2

<u>Comprobación de una conclusión por refutación</u>

$P1: J \to G$
$P2: \neg J \to P$
$C: G \vee P$

$P1: \neg J \vee G$
$P2: J \vee P$
$\lambda C: \neg G \wedge \neg P$ < $C1: \neg G$, $C2: \neg P$

$P1 \wedge P2: G \vee P$
$C1: \neg G$
$C2: \neg P$

λ

FORMAS CANÓNICAS. 1ª F. CANÓNICA (SUMA DE MINITERMS) | 2ª F. CANÓNICA (PRODUCTO DE MAXTERMS)

Ej.: $p \leftrightarrow (q \wedge r)$

	p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$(q \wedge r) \to p$	f
m_0	V	V	V	V	V	V	V ≡ 1
m_1	V	V	F	F	F	V	F ≡ 0
m_2	V	F	V	F	F	V	F ≡ 0
m_3	V	F	F	F	F	V	F ≡ 0
m_4	F	V	V	V	V	F	F ≡ 0
m_5	F	V	F	F	V	V	V ≡ 1
m_6	F	F	V	F	V	V	V ≡ 1
m_7	F	F	F	F	V	V	V ≡ 1

<u>Primera forma canónica</u>: suma de minitérminos en las filas donde la función tiene salida 1. (alto)

$\sum(m_0, m_5, m_6, m_7) \equiv pqr + p'qr' + p'q'r + p'q'r'$

<u>Segunda forma canónica</u>: producto de maxitérminos en la filas donde la función tiene salida 0. (bajo)

$\prod(M_6, M_5, M_4, M_3) \equiv (p'q'r)(p'qr')(p'qr)(pq'r')$

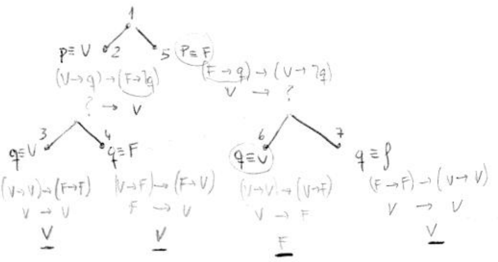
MÉTODOS PARA VALIDAR UNA PROPOSICIÓN: TABLA DE VERDAD | ÁRBOL SEMÁNTICO | REFUTACIÓN

Ej.: Verificar la validez de la sentencia: $S: (p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

T. Verdad

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$P_1 \to P_2$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Árbol semántico



Refutación: suponer la proposición falsa y ver si ello constituye una contradicción.

$$\underbrace{(p \to q)}_{V} \xrightarrow{F} \underbrace{(\neg p \to \neg q)}_{F}$$

Para que S sea falsa, el antecedente ha de ser verdadero y el consecuente falso.
Para que el consecuente sea falso, ha de ser $\neg p$ verdadero y $\neg q$ falso, ha de ser por tanto p falso y q verdadero.
Si p es falso y q verdadero, el antecedente es verdadero y el consecuente falso. La refutación de S no es una contradicción, por tanto S no es tautología.

MÉTODOS PARA VALIDAR UN RAZONAMIENTO: PPIO DE RESOLUCIÓN DE ROBINSON SOBRE FORMAS CLAUSULADAS.

Forma clausulada:

1) Eliminar condicionales
2) Eliminar negaciones (Morgan)
3) Aplicar p. distributiva.

Literal: variable proposicional sola o negada. L_1

Cláusula: colección de disyunción de literales. $L_1 \vee L_2 \vee L_3$

F. Clausulada: colección de conjunción de cláusulas. $(L_1 \vee L_2) \wedge (L_2 \vee L_3)$

Regla de Resolución

$G1: \neg p \vee q \vee r$

$G2: \neg q \vee s$

$R: \neg p \vee r \vee s$

R es consecuencia lógica de G_1, G_2

Comprobación de una conclusión por refutación

$P1: J \to G$

$P2: \neg J \to P$

$C: G \vee P$

$P1: \neg J \vee G$

$P2: J \vee P$

$\lambda C: \neg G \wedge \neg P \quad \begin{cases} C1: \neg G \\ C2: \neg P \end{cases}$

$P1 \wedge P2: G \vee P$

$C1: \neg G$

$C2: \neg P$

λ

FORMAS CANÓNICAS: 1ª F. CANÓNICA (SUMA DE MINITERMS) | 2ª F. CANÓNICA (PRODUCTO DE MAXTERMS)

Ej.: $p \leftrightarrow (q \wedge r)$

	p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$(q \wedge r) \to p$	f
m_0	V	V	V	V	V	V	V ≡ 1
m_1	V	V	F	F	F	V	F ≡ 0
m_2	V	F	V	F	F	V	F ≡ 0
m_3	V	F	F	F	F	V	F ≡ 0
m_4	F	V	V	V	V	F	F ≡ 0
m_5	F	V	F	F	V	V	V ≡ 1
m_6	F	F	V	F	V	V	V ≡ 1
m_7	F	F	F	F	V	V	V ≡ 1

Primera forma canónica: suma de minitérminos en las filas donde la función tiene salida 1. (alto)

$$\Sigma(m_0, m_5, m_6, m_7) \equiv pqr + p'qr' + p'q'r + p'q'r'$$

Segunda forma canónica: producto de maxitérminos en las filas donde la función tiene salida 0. (bajo)

$$\Pi(M_6, M_5, M_4, M_3) \equiv (p'q'r)(p'qr')(p'qr)(pq'r')$$

LÓGICA DE RELACIONES

- LAS RELACIONES SE REPRESENTAN POR LAS LETRAS 'P', 'Q', 'R'

EJ. xRy ó Rxy donde x es el relacionante e y el relacionado.

- OPERACIONES PROPIAS SOBRE LAS RELACIONES
  - R. recíproca o inversa: $R^{1} = \{(y,x) \mid xRy\}$
  - Composición: $R \circ S = \{(x,y) \mid \exists z\,(xRz \wedge zRy)\}$
  - Dominio: $\text{dom } R = \{x \mid \exists y\,(xRy)\}$
  - Rango: $\text{ran } R = \{y \mid \exists x\,(xRy)\}$
- LÓGICA DE RELACIONES COMO EXTENSIÓN DE LA LÓGICA DE CLASES
  - Una relación binaria se puede definir como una clase $R = \{(x,y) \mid xRy\}$
  - $R \subset S \rightarrow \forall x \forall y\,(xRy \rightarrow xSy)$
  - $R = S \rightarrow \forall x \forall y\,(xRy \rightarrow xSy \wedge xSy \rightarrow xRy)$
  - $R \cup S \rightarrow \forall x \forall y\,(xRy \vee xSy)$
  - $R \cap S \rightarrow \forall x \forall y\,(xRy \wedge xSy)$
  - $\bar{R} \rightarrow \{(x,y) / \neg\, x\bar{R}y\}$

LÓGICA TRIVALENTE DE LUKASIEWICS

- ADMITE 3 VALORES DE VERDAD: V | F | INDETERMINADO ≡ 1 | 0 | 1/2
- DEFINICIÓN DE LAS CONECTIVAS BÁSICAS:
  - $\neg p = 1 - p$
  - $p \wedge q = \min(p \wedge q)$
  - $p \vee q = \max(p \vee q)$
  - $p \rightarrow q = \min(1, 1 + q - p)$
  - $p \leftrightarrow q = 1 - |p - q|$

LÓGICA BORROSA

- CONSIDERA QUE LA FRONTERA DE PERTENENCIA A UN CONJUNTO ES GRADUAL.
- EN UN CONJUNTO BORROSO, A CADA ELEMENTO SE LE ASIGNA UN VALOR QUE REPRESENTA SU GRADO DE PERTENENCIA AL CONJUNTO.
- CADA CONJUNTO BORROSO SE DEFINE POR UNA FUNCIÓN DE PERTENENCIA QUE ASIGNA A TODO ELTO DE UNIVERSO SU GRADO DE PERTENENCIA AL CTO.

$$A = \{x \mid \mu_A(x),\ \forall x \in U \text{ si } \mu_A(x) \neq 0\}$$

- OPERACIONES SOBRE CONJUNTOS BORROSOS
  - $\phi = \{x \mid \mu_A(x) = 0\}$
  - Altura del conjunto borroso: máximo grado de pertenencia de los elementos del conjunto.
  - Cto borroso normalizado: al menos un elemento alcanza el mayor grado de pertene
  - Cardinal del cto borroso: suma de todos los grados de pertencia de los eltos del cto.
  - Subconjunto: A es subconjunto borroso de B si: $\forall x \in U .\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$
  - Igualdad: $A = B$ si $\forall x \in U .\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$
  - Desigualdad: $A \neq B$ si $\forall x \in U .\ \mu_A(x) \neq \mu_B(x)$
  - Complemento: $\bar{A} = \{x \mid 1 - \mu_A(x).\ \forall x \in U\}$
  - Unión: $A \cup B = \{x \mid \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),\ \forall x \in U\}$
  - Intersección: $A \cap B = \{x \mid \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),\ \forall x \in U\}$
  - Producto cartesiano: $A \times B = \{(x,y) \mid \mu_{A \times B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)),\ \forall x \in U, \forall y \in$

- Relaciones borrosas:

$R(U,V) = \{ (x_1,y_1)|0.1,\ (x_1,y_2)|0.4,\ (x_2,y_1)|1,\ (x_2,y_2)|0.5 \}$

- Dominio $R(U,V) = \{ x \mid \mu_{domR}(x) = max(\mu_R(x,y_1), \mu_R(x,y_2), \mu_R(x,y_3), \dots, \mu_R(x,y_n)\}$
  Es el conjunto borroso que asigna a cada elemento del conjunto origen U, el máximo grado de relación con cualquiera de los elementos del conjunto imagen V.
- Rango $R(U,V) = \{ y \mid \mu_{ran}(y) = max(\mu_R(x_1,y), \mu_R(x_2,y), \dots, \mu_3(x_n,y)\}$
  Es el conjunto borroso que asigna a cada elto del conjunto imagen V, el máximo grado de relación con cualquiera de los eltos del cto origen U.
- Composición
  Dados los universos borrosos U, V, W y las relaciones borrosas P $(U \to V)$ y Q $(V \to W)$ se define la relación binaria compuesta R entre U, W a aquella que asigna a cada pareja (x,z) el grado de relación obtenido haciendo:
  1. Para cada $y \in V$ se toma el mínimo de los grados de relación $\mu p(x,y)$ y $\mu q(y,z)$.
  2. El máximo de los mínimos anteriores es el grado de relación de la pareja (x,z)

- Interpretación de sentencias simples: es el grado de pertenencia dado por la función
- Interpretación de sentencias compuestas:
  - $I(A(x) \vee B(x)) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$; $\forall x \in U, \forall y \in V$.
    Si los predicados están definidos sobre el mismo universo
    $S(A \vee B) = A \cup B \leftrightarrow A \subset U, B \subset U$
  - $I(A(x) \wedge B(x)) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$; $\forall x \in U, \forall y \in V$.
    $S(A \wedge B) = A \cap B \leftrightarrow A \subset U, B \subset U$
  - $S(A \wedge B) = A \times B$; $A \subset U$, $B \subset V$
  - $I(A(x) \to B(y)) = min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \forall x \in U, \forall y \in V)$

- Cálculo de valores interpolados:
  Ej $A = \{1|0.2,\ 2|0.4,\ 3|0.6\}$ $\mu A(1.5)$?
  Dif($\bar{x}$) —— Dif ($\mu_A(\bar{x})$)
  $(2-1)=1$ $\quad (0.4-0.2)=0.2$
  $1.5-1=0.5$ $\quad x$ $\Big\}$ $x = 0.1$

  $\mu_A(1.5) = \mu_A(1) + 0.1 = 0.3$

- MODIFICADORES LINGUISTICOS: modifican la función de pertenencia.
  No $\equiv NEG(\mu(x)) = 1 - \mu(x)$
  Muy $\equiv CON(\mu(x)) = \mu^2(x)$
  Más o menos $\equiv DIL(\mu(x)) = 2\mu(x) - \mu^2(x)$