TEMA 5: LÓGICA BORROSA

1. CONJUNTOS BORROSOS Y OPERACIONES TÍPICAS.
2. RELACIONES BORROSAS.
3. INTERPRETACIÓN DE SENTENCIAS BORROSAS.
4. MODIFICADORES

La lógica borrosa se puede considerar como una extensión de la lógica polivalente con infinitos valores de verdad. Ofrece los fundamentos para el razonamiento con incertidumbre y para la lógica de predicados con sentencias imprecisas.

Ej.: Normalmente, los muebles antiguos, son difíciles de conseguir,
Lo difícil de conseguir es caro,

Normalmente, los muebles antiguos son caros — Predicados borrosos

cuantificador borroso

Para abordar este tipo de razonamientos, la lógica borrosa permite lo mismo que la lógica de predicados más el uso de:

- predicados borrosos: antiguo, difícil de conseguir, caro, obra de arte, bueno...
- cuantificadores borrosos: muchos, pocos, algunos, la mayoría, normalmente...
- modificadores borrosos: muy, más o menos, casi, bastante...
- valores de verdad comprendidos entre '0' y '1'
- distintas interpretaciones de las sentencias: casi cierta, cierta, muy cierta, casi falsa, falsa, muy falsa.

CONJUNTOS BORROSOS

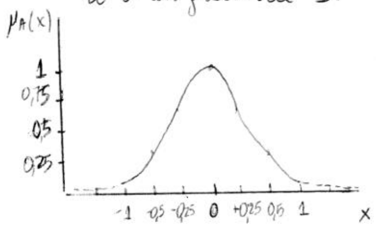
Los conjuntos borrosos surgen para dar cabida a aquellas situaciones en las que resulta difícil determinar o no la pertenencia a un conjunto. Ej.: "números naturales mucho mayores que 100", "ríos largos", "personas jóvenes".
En los conjuntos borrosos no existe un criterio que determine exactamente un límite entre pertenencia y no pertenencia al conjunto, la manera más apropiada de dar solución a este problema es considerar que la frontera de pertenencia al conjunto no es brusca, sino gradual.

Un conjunto borroso se define matemáticamente asignando a cada individuo del universo de discurso un valor que representa su grado de pertenencia al conjunto. Este grado de pertenencia es una medida del grado de compatibilidad entre el individuo en cuestión y el concepto asociado al conjunto borroso.
Los grados de pertenencia se suelen representar por números reales en el rango de 0 a 1.
Ej.: "día soleado" puede asignar un grado de pertenencia de **1** a 0% de nubes, **0.8** a 20%, **0.4** a 30% y **0.0** a porcentajes superiores a 75% de nubes".

Dado un universo discreto o continuo U, se define un conjunto borroso A por una función de pertenencia μ_A que asigna a cada elemento x del universo un valor comprendido entre 0 y 1. Así $\mu_A(x)$ representa el grado de pertenencia del elemento x al conjunto A.

Ej.: $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+10x^2}$ define el conjunto borroso de números reales próximos a cero.

En este conjunto el '1' tiene un grado de 0,09 de pertenencia, el '0,25' un grado del 0,62 y el '0' un grado del 1.



$\mu_A(0) = 1$
$\mu_A(0{,}25) = 1/1+10(0{,}25)^2 = 0{,}62$
$\mu_A(0{,}5) = 1/1+10(0{,}5)^2 = 0{,}29$
$\mu_A(1) = 1/1+10 = 0{,}08$

La notación matemática que se suele emplear para un conjunto borroso, definido sobre un universo discreto, es la del conjunto formado por todos los pares de elementos del universo y sus grados de pertenencia al conjunto borroso, siendo habitual indicar sólo aquellos elementos con grado de pertenencia distinto de cero.

$$A = \{ x \mid \mu_A(x),\ \forall x \in U \text{ si } \mu_A(x) \neq 0 \}$$

OPERACIONES TIPICAS

Vamos a considerar un conjunto universo U discreto formado por las siguientes edades:

U = edades = {5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80}

y cuatro conjuntos borrosos que representan los conceptos "bebé", "joven", "adulto" y "viejo".

Elementos	bebé	joven	adulto	viejo
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

bebe = { }

joven = {5|1, 10|1, 20|0.8, 30|0.5, 40|0.2, 50|0.1}

adulto = {20|0.8, 30|1, 40|1, 50|1, 60|1, 70|1, 80|1}

viejo = {20|0.1, 30|0.2, 40|0.4, 50|0.6, 60|0.8, 70|1, 80|1}

- Conjunto borroso vacío (∅) → todos los elementos del universo U tienen grado de pertenencia al conjunto A = 0.
- Altura del conjunto borroso → máximo valor de pertenencia obtenido por cualquiera de los elementos.
- Conjunto borroso normalizado → al menos un elemento alcanza el mayor grado de pertenencia.
- Cardinal de un conjunto borroso : card (A) → suma de todos los grados de pertenencia de los elementos del ~~universo~~ conjunto

$$card(A) = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$$

Ej.: card(viejo) = 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8 + 1 + 1 = 4.1

- Un conjunto borroso A es subconjunto de otro conjunto borroso B, definido sobre un mismo universo U, si el grado de pertenencia de cada elemento del conjunto A es menor o igual que su grado de pertenencia al conjunto B.

$$A \subset B \leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x),\ \forall x \in U$$

$A = \{x_1|0.5,\ x_2|0.8,\ x_3|0.5\}$
$B = \{x_1|0.6,\ x_2|0.9,\ x_3|1.0\}$

Ej.: viejo $\subset$ adulto $\rightarrow \mu_{viejo}(x) \leq \mu_{adulto}(x),\ \forall x \in U$

- Igualdad

$$A = B \leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x),\ \forall x \in U$$

- Desigualdad

$$A \neq B \leftrightarrow \mu_A(x) \neq \mu_B(x),\ \forall x \in U$$

- Complemento $\bar{A}$ de un conjunto borroso A, con respecto al universo U, es el conjunto borroso obtenido asignando a cada elemento del universo el complemento respecto a la unidad de su grado de pertenencia.

$$\bar{A} = \{ x \mid 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in U \}$$

$\overline{viejo}$ = {5|1, 10|1, 20|0.9, 30|0.8, 40|0.6, 50|0.4, 60|0.2}

Unión de dos conjuntos borrosos A y B, $A \cup B$, es el conjunto borroso obtenido asignando a cada elemento del universo el máximo valor de su grado de pertenencia a cualquiera de los dos conjuntos.

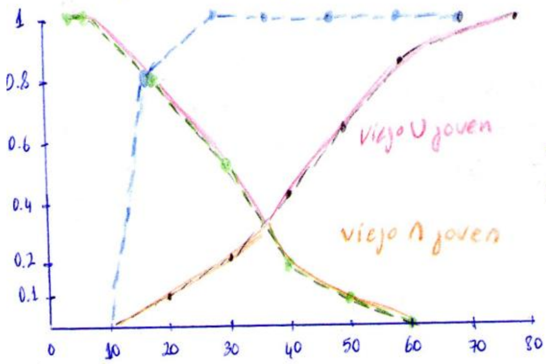
$$A \cup B = \{x \mid \mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in U\}$$

Ej.: joven $\cup$ viejo = $\{5|1, 10|1, 20|0.8, 30|0.5, 40|0.4, 50|0.6, 60|0.8, 70|1, 80|1\}$

Intersección de dos conjuntos borrosos, $A \cap B$, como el conjunto borroso obtenido asignando a cada elemento del universo el mínimo valor de su grado de pertenencia a cualquiera de los dos conjuntos.

$$A \cap B = \{x \mid \mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in U\}$$

Ej.: joven $\cap$ viejo = $\{20|0.1, 30|0.2, 40|0.2, 50|0.1\}$



La representación gráfica de los grados de pertenencia de los conjuntos joven, adulto y viejo permite observar rápidamente:

- altura(joven) = altura(adulto) = altura(viejo) = 1
- viejo $\subset$ adulto

- Producto cartesiano, $A \times B$, de dos conjuntos A y B definidos sobre universos U y V diferentes, es el conjunto borroso obtenido asignando a cada pareja formada por un elemento de U y otro de V el menor de sus grados de pertenencia al conjunto A y al conjunto B.

$$A \times B = \{(x,y) \mid \mu_{A\times B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \forall x \in U, \forall y \in V\}$$

RELACIONES BORROSAS

Dados "n" universos discretos o continuos $U_1, U_2, \ldots U_n$, se define una relación borrosa R, por una función de pertenencia μ_R que asigna a cada enepla $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ (del producto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$) un valor comprendido entre 0 y 1. $\mu_R(x_1, x_2, \ldots x_n)$ representa el grado de pertenencia de la enepla $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ a la relación R.

Ej.: $\mu_R(x,y) = \dfrac{1}{1 + 10(x-y)^2}$ define la relación borrosa de números reales próximos entre sí.

Consideramos los siguientes conjuntos no borrosos de ciudades:

$U = \{$Cádiz, Gerona, Sevilla$\}$ $V = \{$Cádiz, Toledo$\}$

Se establece la siguiente relación binaria borrosa "las ciudades españolas $x \in U$ y $v \in V$ están muy lejos"

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Cádiz} & \text{Toledo} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Cádiz} \\ \text{Gerona} \\ \text{Sevilla} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 1 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$R(U,V) = \{$(Cádiz, Toledo)$|0.4$, (Gerona, Cádiz)$|1$, (Sevilla, Cádiz)$|0.1$, (Gerona, Toledo)$|0.6$, (Cádiz, Toledo)$|0.3\}$

- Dominio de una relación borrosa binaria: conjunto borroso dom R(U,V) que asigna a cada elemento del conjunto origen U el máximo grado de relación con cualquiera de los elementos del conjunto imagen V.

$$\text{dom } R(U,V) = \{x \mid \mu_{\text{dom} R}(x) = \max_{y \in V}(x,y), \forall x \in U, \forall y \in V\}$$

dom $R(U,V) = \{$Cádiz$|0.4$, Gerona$|1$, Sevilla$|0.3\}$

Consideremos el universo de los números reales y el predicado "número similar a otro" definido por la siguiente relación

$$\mu_s(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-y)^4} & \text{si } |y-x| \leq 5 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- A la interpretación de una sentencia simple como "y es similar a x" podemos asociar como valor de verdad el grado de pertenencia de la pareja (x,y) a la relación borrosa definida por la función de pertenencia $\mu_s(x,y)$
Ej.: "4 es similar a 2" tiene un valor de verdad igual a $\mu_s(2,4) = \frac{1}{1+(2-4)^4} = \frac{1}{17}$.

"Dado un predicado diádico al que se ha asociado una relación borrosa R, que represente su significado, a la interpretación verdadera de una sentencia simple de forma $R(x,y)$ donde 'x' es un elemento del universo U e 'y' es un elemento del universo V, se le asocia el valor de verdad $\mu_R(x,y)$, es decir, el grado de pertenencia de la pareja (x,y) a la relación R.

$$I(R(x,y)) = \mu_R(x,y) = \alpha$$

- SENTENCIAS COMPUESTAS -

La interpretación de sentencias compuestas se realiza utilizando unas reglas básicas que se traducen a operaciones sobre funciones de pertenencias:

Regla de disyunción : $I(A(x) \vee B(y)) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y))$; $\forall x \in U, \forall y \in V$
Si dos predicados están definidos sobre un mismo universo, el predicado compuesto por disyunción tiene asociado el conjunto borroso obtenido como unión de los dos conjuntos particulares:

$$S(A \vee B) = A \cup B;\ A \subset U,\ B \subset U$$

Regla de conjunción : $I(A(x) \wedge B(y)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$; $\forall x \in U, \forall y \in V$
Si dos predicados están definidos sobre un mismo universo, el predicado compuesto por conjunción tiene asociado el conjunto borroso obtenido como intersección de los dos conjuntos particulares:

$$S(A \wedge B) = A \cap B;\ A \subset U,\ B \subset U.$$

Si dos predicados están definidos sobre diferentes universos, el predicado compuesto por conjunción tiene asociado la relación borrosa obtenida como producto cartesiano de los dos conjuntos particulares:

$$S(A \wedge B) = A \times B;\ A \subset U,\ B \subset V$$

Regla condicional : $I(A(x) \rightarrow B(y)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$, $\forall x \in U, \forall y \in V$

MODIFICADORES LINGUISTICOS

Los modificadores (adverbios como "muy", "más o menos", "casi", etc.) se modelan en la teoría de conjuntos borrosos mediante operaciones sobre la función de pertenencia asociada al predicado que se está modificando.

Operaciones de V. Novak:

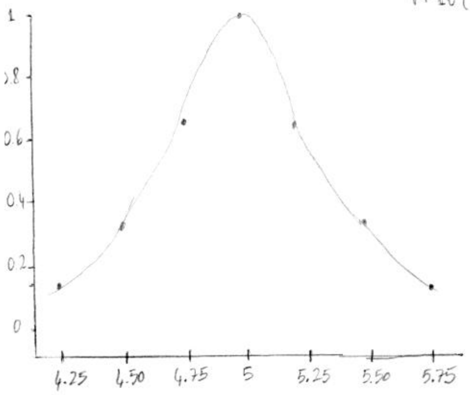
Negación $NEG(\mu(x)) = 1-\mu(x)$

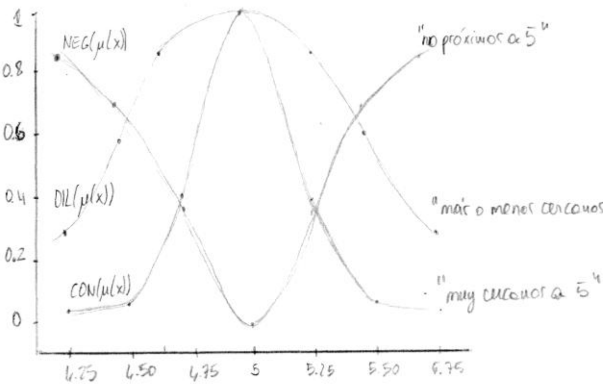
Concentración $CON(\mu(x)) = \mu^2(x)$.

Dilatación $DIL(\mu(x)) = 2\mu(x)-\mu^2(x)$

Intensificación $INT(\mu(x)) = \begin{cases} 2\mu^2(x) & \text{si } 0 \leq \mu(x) \leq 0.5 \\ 1-2(1-\mu(x))^2 & \text{si } \mu(x) > 0.5 \end{cases}$ (*suele utilizarse en combinación con otra operación, por ejemplo, encadenada con una concentración hace aún más selectiva la propiedad *)

Sea la función de pertenencia: $\mu(x) = \frac{1}{1+10(x-5)^2}$ la representación del conjunto "números reales próximos a 5"





$\mu(4.25) = 0.15$; $\mu(4.50) = 0.29$ $\mu(4.75) = 0.62$

$\mu(x) = \frac{1}{1+10(x-5)^2}$ = "números reales próximos a 5"

$NEG(\mu(x)) = 1-\mu(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+10(x-5)^2}\right) \longrightarrow NEG(\mu(4.25)) = 0.85$, $NEG(\mu(4.50)) = 0.71$; $NEG(\mu(4.75)) = 0.38$;

$CON(\mu(x)) = \mu^2(x) = \left(\frac{1}{1+10(x-5)^2}\right)^2 \longrightarrow$ "números reales <u>muy</u> próximos a 5"

$CON(\mu(4.25)) = 0.02$; $CON(\mu(4.50)) = 0.08$; $CON(\mu(4.75)) = 0.38$;

$DIL(\mu(x)) = 2\mu(x)-\mu^2(x) = 2\left(\frac{1}{1+10(x-5)^2}\right) - \left(\frac{1}{1+10(x-5)^2}\right)^2 \longrightarrow$ "números reales <u>más o menos</u> próximos a 5"

$DIL(\mu(4.25)) = 0.28$; $DIL(\mu(4.50)) = 0.57$; $DIL(\mu(4.75)) = 0.86$;

$$INT(\mu(x)) = \begin{cases} 2\mu^2(x) = 2\left(\frac{1}{1+10(x-5)^2}\right)^2 & \text{si } 0 \leq \mu(x) \leq 0.5 \\ 1-2\left[1-\left(\frac{1}{1+10(x-5)^2}\right)^2\right] & \text{si } \mu(x) > 0.5 \end{cases}$$

jemplo 7.

e elige el conjunto "joven" = $J = \{5|1, 10|1, 20|0.8, 30|0.5, 40|0.2, 50|0.1\}$ y sobre el universo de las estaturas (en cm) se define el concepto "persona de estatura media" = $M = \{160|0.5, 170|1, 180|0.5\}$. El conjunto cartesiano de ambos conjuntos tiene la siguiente representación:

$J \times M = \{(x,y) \mid \min(\mu_J(x), \mu_m(y)), \forall x \in J, \forall y \in M\} = \{(5,160)|0.5, (5,170)|1, (5,180)|0.5, (10,160)|0.5, (10,170)|1, (10,180)|0.5,$
$(20,160)|0.5, (20,170)|0.8, (20,180)|0.5, (30,160)|0.5, (30,170)|0.5, (30,180)|0.5, (40,160)|0.2, (40,170)|0.2, (40,180)|0$
$(50,160)|0.1, (50,170)|0.1, (50,180)|0.1\}$

jemplo 9.

Dados los universos: E = estaciones del año = {primavera, verano, otoño, invierno}
S = sensaciones = {calor, frío}

Se ha establecido una relación subjetiva (borrosa) entre estación del año y sensación de calor o frío que se siente, expresada matricialmente como sigue:

$$\begin{array}{c|cc} & c & f \\ \hline p & 0.7 & 0.4 \\ v & 1 & 0 \\ o & 0.6 & 0.5 \\ i & 0.1 & 1 \end{array}$$

De acuerdo con esta relación, ¿qué valores de verdad corresponden a las siguientes sentencias: "en otoño se siente frío", "en invierno se siente calor"?

$R(o, f) = 0.5$
$R(i, c) = 0.1$

Ejemplo 10.

Con los datos del ejemplo 7, se desea obtener una relación borrosa asociada al predicado "persona joven o de estatura media"

$I(J(x) \vee M(x)) = \{(x \in J, y \in M) \mid \max(\mu_J(x), \mu_m(y))\} = \{(5,160)|1, (5,170)|1, (5,180)|1, (10,160)|1, (10,170)|1, (10|180)|1,$
$(20,160)|0.5, (20,170)|1, (20|180)|0.5, (30|160)|0.5, (30|170)|1, (30,180)|0.5, (40|160)|0.5, (40|170)|1, (40|180)|0.5,$
$(50,160)|0.5, (50,170)|1, (50|180)|0.5\}$

Ejemplo 11

Con los datos del ejemplo 7, sabiendo que Juan tiene 20 años y que mide 180 cm, se pide interpretar la sentencia:
"Juan es joven o de estatura media"

"Juan tiene 20 años" $\mu_A(\text{Juan}) = 0.8$
"Juan mide 180 cm" $\mu_B(\text{Juan}) = 0.5$
$\Rightarrow$ "Juan es joven o de estatura media" = $(20,180)) \max(\mu_A(20), \mu_B(80)) = 0.8$

Ejemplo 12

Obtener los siguientes conjuntos borrosos a partir del universo de edades $U = \{5,10,20,30,40,50,60,70,80\}$ y los conjuntos
bebe = { }, joven = $\{5|1, 10|1, 20|0.8, 30|0.5, 40|0.2, 50|0.1\}$, adulto = $\{20|0.8, 30|1, 40|1, 50|1, 60|1, 70|1, 80|1\}$,
viejo = $\{20|0.1, 30|0.2, 40|0.4, 50|0.6, 60|0.8, 70|1, 80|1\}$: "no joven", "muy adulto", "hiper viejo = viejísimo", "más o menos joven", "casi viejo".

"no joven" = $\neg(\text{joven}(x)) = \neg(\mu_J(x)) = NEG(\mu_J(x)) = 1 - \mu_J(x) = \{5|0, 10|0, 20|0.2, 30|0.5, 40|0.8, 50|0.9\}$

"muy adulto" = muy(adulto(x)) = $CON(\mu_a(x)) = \mu_a^2(x) = \{20|0.8^2, 30|1, 40|1, 50|1, 60|1, 70|1, 80|1\}$

"hiperviejo" = muy(muy(viejo(x))) = $INT(CON(\mu_v(x))) = \{20|0.1^3, 30|0.2^3, 40|0.4^3, 50|0.6^3, 60|0.8^3, 70|1, 80|1\} =$
$\{20|0.001, 30|0.008, 40|0.064, 50|0.22, 60|0.51, 70|1, 80|1\}$

"más o menos joven" = más o menos(joven(x)) = $DIL(\mu_J(x)) = 2\mu_J(x) - \mu_J^2(x) = \{5|2\cdot1-1, 10|2\cdot1-1, 20|2\cdot0.8-0.64, 30|1-0.25, 40|2\cdot0$
$50|2\cdot0.1-0.01\} = \{5|1, 10|1, 20|0.96, 30|0.75, 40$
$50|0.19\}$