TEMA 4 : OTRAS LÓGICAS

a es el único 'x' tal que Px

1. LÓGICA DE PREDICADOS CON IDENTIDAD ⊜ | Uso de descriptores: $a = \imath x Px$
2. LÓGICA DE CLASES
3. LÓGICA DE RELACIONES

] Ejercicios Tipo: "Sea el modelo de interpretación Universo-Clases-Relaciones"
"Si todo A es B..."

4. LÓGICAS POLIVALENTES $3Bool = \{0, 1/2, 1\}$ — 1/2: indeterminado

LÓGICA DE PREDICADOS CON IDENTIDAD

Resulta de ampliar la lógica de predicados con el signo ⊜ que presenta 8 significados distintos:

1) Dos "cosas" son iguales cuando todo predicado (propiedad) que puede ser dicho de la una se satisface solo si se satisface por la otra (Dos cosas son iguales cuando tienen las mismas propiedades)
$x = y \leftrightarrow \forall P(Px \leftrightarrow Py)$

2) Dos objetos son iguales solo si ambos pertenecen a los mismos conjuntos y solo a ellos simultáneamente.
$x = y \leftrightarrow \forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z)$ (Primera forma conjuntista)

3) Dos objetos son iguales solo si, siendo clases, tienen los mismos elementos:
$x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ (Segunda forma conjuntista)

4) Para correspondencias y funciones:
$y = f(x)$ para expresar $(x,y) \in f$

5) Otra forma, mediante predicado diádico:
$y = f(x) \equiv y = f(x) \leftrightarrow Pxy$

6) Relación de equivalencia

7) Relación de identidad Ej.: $x = x$

8) Definición de un signo. Ej.: $4 = 3+1$

9) Axiomas de igualdad

Sentidos del verbo ser:

1. Identidad, ⊜
   Ej.: "Virgilio es el más famoso poeta latino" - lógica de predicados
2. Pertenencia, ⋲
   Ej.: "Sócrates es un hombre" - lógica de clases
3. Inclusión, ⊂
   Ej.: "los limeños son peruanos" - lógica de relaciones
4. Predicación
   Ej.: "la rosa es roja" - lógica de predicados

Análisis de cuantificadores numéricos

Ej.: "hay por lo menos dos entidades que tienen la propiedad P" se puede expresar como:
$\exists xy(Px \wedge Py \wedge x \neq y)$
"hay exáctamente una entidad que tiene la propiedad P":

las descripciones son expresiones que se inician con el artículo determinado singular "el", "la" y que nombran una entidad dada. El descriptor debe definir algo existente y único.

Ej.: "El rey de Francia es anglófobo" → F: no existe Rey en Francia.
"El autor de PM era inglés" → F: los autores de PM son 2.
"La reina de Inglaterra es calva → F: aun cuando hay una reina de Inglaterra, ésta no es calva.

Se resume que un enunciado de la forma "El tal es tal y cual" para ser verdadero debe satisfacer 3 condiciones:
1. Debe haber por lo menos un tal.
2. Debe haber a lo sumo un tal.
3. El tal en cuestión debe ser tal y cual.

Uso del descriptor 'ı': $x = \iota y Py$ se lee 'x' es el 'y' tal que 'Py'

Tipos de descripciones

- Propias: se da la existencia y unicidad de 'y'. Ej.: "7 es el x tal que $x^2=49$"
- Impropias: "el 'y' tal que es el actual Rey de Francia"

Formulación

Ej.: "El actual Rey de Francia se llama Luis",
Sean P, "se llama Luis" y Q "es Rey de Francia actualmente" $= P(\iota x Qx) = \neg\exists x(Px \wedge Qx)$

LÓGICA DE CLASES (LÓGICA DE PREDICADOS DE 1ER ORDEN MONÁDICOS – ALGEBRA BOOLEANA DE CLASES)

En la lógica de clases se utiliza el signo ($\in$) que representa la pertenencia de un miembro a una clase.

$x \in A \rightarrow$ "x pertenece a la clase A"; $x \notin A \rightarrow$ "x no pertenece a la clase A"

$A \equiv \{x / A(x)\} \rightarrow$ "la clase de todos los x tales que verifican $A(x)$"

$\emptyset \rightarrow$ clase vacía

$U \rightarrow$ clase referencial o dominio

Operaciones sobre las clases

INCLUSIÓN: se dice que una clase A está incluida en una clase B, cuando todos los miembros de A son miembros de B.

$$A \subset B \equiv \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

IDENTIDAD: la clase A es idéntica a la clase B cuando todo miembro de A es miembro de B y todo miembro de B es miembro de A.

$$A = B \equiv \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

UNIÓN: la unión de las clases A y B es la clase compuesta por todos los miembros que pertenecen a A o a B o a ambas.

$$A \cup B \equiv \{x \mid (x \in A \vee x \in B)\}$$

INTERSECCIÓN: la intersección de las clases A y B es la clase compuesta de todos los miembros que pertenecen a la vez a A y a B.

$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

COMPLEMENTO: el complemento de la clase A es la clase de todos los elementos que no pertenecen a A.

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

Estructura de algebra de Boole

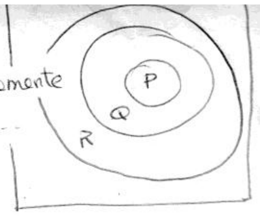
Dadas dos clases cualesquiera A y B han de verificarse las propiedades:

1. $\bar{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$ son clases. Las operaciones $\bar{\ }$, $\cup$, $\cap$ son cerradas sobre el conjunto de clases.
2. $\emptyset$ y U son los elementos neutros: $A \cup \emptyset = A$; $A \cap U = A$
3. La unión con el complementario es la clase referencial: $A \cup \bar{A} = U$
   La intersección con el complementario es la clase vacía: $A \cap \bar{A} = \emptyset$
4. La unión y la intersección son conmutativas: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
5. La unión y la intersección son asociativas: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6. La unión es distributiva con respecto a la intersección y viceversa:
   $A \cup (B \cap C) = A \cup C \cap A \cup B$
   $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

Los axiomas y leyes del álgebra booleana de clases son paralelos a los de la lógica de proposiciones.

mprobación mediante diagramos de Euler

presentación gráfica de clases para validar razonamientos.



$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

$p \to q$ .... equivale a decir "toda p es q" .... gráficamente

$q \to r$ .... "toda q es r" ....

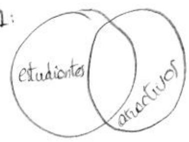
j.: Comprobar la validez de la siguiente argumentación

P1: Algunos estudiantes son atractivos

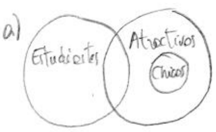
P2: Todas las chicas son atractivas

C: Algunos estudiantes son chicos

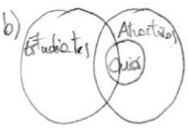
P1:



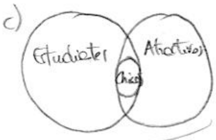
P1 ∧ P2: a)



b)



c)



la comprobación mediante diagramas de Euler es intuitiva y tiene carácter auxiliar y no debe ser aceptado como prueba.

En estos 2 representaciones se concluye que dos estudiantes son chicos pero no podemos dar este razonamiento como tautológico.

3º LÓGICA DE RELACIONES (LÓGICA DE PREDICADOS POLIÁDICOS - ÁLGEBRA DE RELACIONES)

Trata enunciados del tipo "Ricardo ama a Lelia", "Venus está entre Mercurio y la Tierra".
Las relaciones las representan por las letras 'P', 'Q', 'R'.
Ej.: Rxy o xRy donde x es el relacionante e y el relacionado.

lógica de relaciones como extensión de la lógica de clases
(= álgebra de relaciones como extensión del álgebra de Boole)

- Una relación binaria se puede definir como una clase: $R \equiv \{(x,y) \mid R(x,y)\}$
  "la clase de todos los pares (x,y) tales que verifican el predicado R".
- También se define la relación vacía, la relación referencial y las operaciones de:

INCLUSIÓN: $R \subset S \equiv \forall x \forall y\, (xRy \rightarrow xSy)$
"la relación R está incluida en la relación S si todos los parejas (x,y) que verifican la relación R también verifican la relación S."

IDENTIDAD: $R = S \equiv \forall x \forall y\, (xRy \leftrightarrow xSy)$
"Las relaciones R y S son idénticas si todos los parejas (x,y) que verifican la relación R también verifican S y viceversa"

UNIÓN: $R \cup S \equiv \forall x \forall y\, (xRy \vee xSy)$

INTERSECCIÓN: $R \cap S \equiv \forall x \forall y\, (xRy \wedge xSy)$

COMPLEMENTO: $\bar{R} \equiv \{(x,y) / \neg (xRy)\}$

- Se definen operaciones propias de las relaciones:

R. RECÍPROCA O INVERSA: $R' \equiv \{(y,x) / (xRy)\}$
"la relación recíproca de la relación R es otra relación formada por todas las parejas (x,y) tales que su recíproca (y,x) verifica la relación R".
Ej.: relación recíproca de "Mayor que" es "Menor que"

COMPOSICIÓN: $R \circ S \equiv \{(x,y) \mid \exists z\, (xRz \wedge zSy)\}$
"la composición de la relación R con la relación S es otra relación formada por todos las parejas (x,y) tales existe algún z de forma que la pareja (x,z) verifica la relación R y la pareja (z,y) verifica la relación S"
Ej.: relación compuesta de "padre de" y "madre de" es "abuelo materno de".

DOMINIO: $\text{dom } R \equiv \{x \mid \exists y\, (xRy)\}$

RANGO: $\text{ran } R \equiv \{y \mid \exists x\, (xRy)\}$

4. LÓGICAS POLIVALENTES (ó MULTIVALENTE o MULTIVALORADA)

Son aquellas que admiten más de 2 valores semánticos, nacen al querer determinar el valor de verdad de sentencias que no son absolutamente ciertas o falsas.
La lógica bivalente se extiende a trivalente con el valor $1/2$ = INDETERMINADO.

LÓGICA TRIVALENTE DE LUKASIEWICS

Tabla de verdad $V = \{0, 1, 1/2\}$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	
0	0	0	0	1	1	
0	1	0	1	1	0	
0	1/2	0	1/2	1	1/2	
1	0	0	1	0	0	$1-\lvert p-q\rvert = 1-1=0$
1	1	1	1	1	1	$1-\lvert 1-1\rvert = 1-0 = 1$
1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	$1-\lvert p-q\rvert = 1-1/2 = 1/2$
1/2	0	0	1/2	1/2	1/2	
1/2	1	1/2	1	1	1/2	
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	

$\neg p = 1 - p$
$\neg 1 = 0$
$\neg 0 = 1$
$\neg 1/2 = 1 - 1/2 = 1/2$

Existen ≠ tipos de lógica trivalente
Ej.: Kleene, Bochvar, Heyting
Cada una de las cuales da una interpretación distinta de las conectivas $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Definición de las conectivas básicas

$\neg p = 1 - p$
Ej. $p = 1 \Rightarrow \neg p = 1-1=0$
$p = 1/2 \Rightarrow \neg p = 1-1/2 = 1/2$
$p = 0 \Rightarrow \neg p = 1-0 = 1$

$p \wedge q = \min(p, q)$
Ej.: $p=0, q=1/2 \Rightarrow p \wedge q = \min(0, 1/2) = 0$
$p = 1, q = 1/2 \Rightarrow p \wedge q = \min(1, 1/2) = 1/2$

$p \vee q = \max(p, q)$
Ej.: $p=0, q=1/2 \Rightarrow p \vee q = \max(0, 1/2) = 1/2$
$p=1, q=1/2 \Rightarrow p \vee q = \max(1, 1/2) = 1$

$p \to q = \min(1, 1+q-p)$
Ej.: $p=0, q=1/2 \Rightarrow p \to q = \min(1, 1+q-p) = \min(1, 1+1/2-0) = 1$
$p=1/2, q=1 \Rightarrow p \to q = \min(1, 1+1-1/2) = \min(1, 1/2) = 1$
$p=1/2, q=0 \Rightarrow p \to q = \min(1, 1+0-1/2) = \min(1, 1/2) = 1/2$

$p \leftrightarrow q = 1 - \lvert p-q \rvert$

Inconvenientes

- interpretación de los valores de verdad.
- aún pueden considerarse insuficientes las graduaciones de los valores de verdad en expresiones como "no completamente", "casi", "más o menos". Solo la lógica polivalente infinita cubre todos estos matices.
- no es posible correlacionar cada valor de verdad con un cierto grado de probabilidad, lo cual es necesario en ciertos ámbitos científicos (física cuántica)