TEMA 3: LÓGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN.-

1. INTRODUCCIÓN

La lógica de proposiciones no contempla sentencias del tipo:
" todos los hombres son mortales; Sócrates es un hombre luego Sócrates es mortal "

La lógica de predicados permite:
- expresar propiedades aplicadas a un individuo cualquiera (variable) o uno concreto (constante)
- expresar relaciones entre individuos

Ej.: Juan enseña a Pedro (2 constantes)
Algunos hombres enseñan a Pedro (variable hombre y constante Pedro)
Todos los hombres enseñan a alguien (dos variables)

2. EL LENGUAJE DE LÓGICA DE PREDICADOS

PREDICADOS, FÓRMULAS ATÓMICAS Y SENTENCIAS.

Predicado = formalización de una propiedad o relación.
Para expresar una propiedad se utilizan predicados de un solo argumento (monádicos)
Ej.: " x es un pato " se puede expresar como $P(x)$ o Px.

Fórmula atómica = predicado seguido por sus argumentos.
Ej.: $A(x)$.
Una fórmula atómica también es una sentencia.

En lógica de predicados las variables proposicionales no siempre son verdaderas o falsas: El valor de verdad depende del valor que toma la variable.
Ej.: "x es un animal" $A(x)$ es verdadero o no dependiendo de x.

sentencia
- cerrada: todas las variables que intervienen en las fórmulas atómicas están cuantificadas
- abierta: puede cerrarse fijando valores para las variables que intervienen en ella.

CUANTIFICADORES

Cuantificador universal: $\forall$
Cuantificador existencial: $\exists$
Cuatro modelos básicos de uso de los cuantificadores:
Enunciado universal afirmativo (A): $\forall x P_x$ [Todos los x son P]
Enunciado universal negativo (E): $\forall x (\neg P_x)$ [Ningún x es P]
Enunciado particular afirmativo (I): $\exists x P_x$ [Algún x es P]
Enunciado particular negativo (O): $\exists x (\neg P_x)$ [Algún x no es P]

FUNCIONES

Las funciones no representan ninguna propiedad o relación entre los argumentos que puede interpretarse como verdadero o falso, es una ayuda para expresar relaciones.
Ej.: función m = madre. Aplicada a un individuo x, es m(x) = madre del individuo.
predicado igualdad $I(x,y)$ devuelve verdadero si $x=y$.
Supongamos y = Felipe II, x = Isabel de Portugal,
$I(x, m(x))$ es verdadero.

Índice de una función = nº argumentos.
$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow \text{f. unitaria} \\ n=2 \Rightarrow \text{f. binaria} \\ n=3 \Rightarrow \text{f. ternaria} \end{cases}$$

SÍMBOLOS

Los símbolos de la lógica de predicados son los mismos que los de lógica de proposiciones, más:
f, g, h → funciones
P, Q, R → predicados
$\forall$, $\exists$ → cuantificadores

SEMÁNTICA

$\forall x Px \equiv Pa \wedge Pb \wedge Pc \wedge Pd$ $\quad x = \{a, b, c, d\}$
$\exists x Px \equiv Pa \vee Pb \vee Pc \vee Pd$
Diferencias entre la semántica de la lógica de proposiciones y la lógica de predicados
1. En lógica de predicados se extiende el dominio de aplicación a todos los elementos del discurso. Si tenemos Px y el universo del discurso es {a, b, c, d}, una interpretación debe asignar valores a Pa, Pb, Pc y Pd.
2. $F(\forall x Ax) = F(Aa) \wedge (F Ab) \wedge (F Ac) \wedge \ldots$ donde {a, b, c, ...} es el universo del discurso.
$F(\exists x Ax) = F(Aa) \vee F(Ab) \vee F(Ac) \vee \ldots$
3. Si el número del discurso es infinito, el número de clases de equivalencia también lo es.

3. SISTEMA AXIOMÁTICO EN LÓGICA DE PREDICADOS.

Axiomas:

1) $p \wedge p \rightarrow p$
2) $p \rightarrow p \vee q$
3) $p \vee q \rightarrow q \vee p$
4) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$

coinciden con las leyes de lógica de proposiciones

5) Ley de especificación: $\forall x Px \rightarrow Pa$

6) Ley de introducción del generalizador: $\forall x (p \rightarrow Px) \rightarrow (p \rightarrow \forall x Px)$

4. LEYES EN LÓGICA DE PREDICADOS

$\nexists x / \neg Px$

LO MEJOR QUE HE HECHO HA SIDO NO LEER NUNCA ESTAS 2 PÁGINAS

apítulo III: Lógica de predicados de primer orden

1. Leyes de interdefinición de los cuantificadores

$$\forall x Px \leftrightarrow \neg \exists x(\neg Px) \quad \text{(III-20a)}$$
$$\exists x Px \leftrightarrow \neg \forall x(\neg Px) \quad \text{(III-20b)}$$
$$\forall x(\neg Px) \leftrightarrow \neg \exists x Px \quad \text{(III-20c)}$$
$$\exists x(\neg Px) \leftrightarrow \neg \forall x Px \quad \text{(III-20d)}$$

2. Leyes aristotélicas de oposición

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow \neg \exists x(Px \wedge \neg Qx) \quad \text{(III-21a)}$$
$$\forall x(Px \rightarrow \neg Qx) \leftrightarrow \neg \exists x(Px \wedge Qx) \quad \text{(III-21b)}$$
$$\exists x(Px \wedge Qx) \leftrightarrow \neg \forall x(Px \rightarrow \neg Qx) \quad \text{(III-21c)}$$
$$\exists x(Px \wedge \neg Qx) \leftrightarrow \neg \forall x(Px \rightarrow Qx) \quad \text{(III-21d)}$$

3. Ley de identidad

$$\forall x(Px \leftrightarrow Px) \quad \text{(III-22)}$$

4. Ley de contradicción

$$\forall x(\neg(Px \wedge \neg Px)) \quad \text{(III-23)}$$

5. Ley del tercio excluso

$$\forall x(Px \vee \neg Px) \quad \text{(III-24)}$$

6. Ley de distribución del cuantificador universal por la conjunción

$$\forall x(Px \wedge Qx) \leftrightarrow (\forall x Px \wedge \forall x Qx) \quad \text{(III-25)}$$

7. Ley de distribución del cuantificador universal por el condicional

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx) \quad \text{(III-26)}$$

8. Ley de distribución del cuantificador universal por el bicondicional

$$\forall x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \leftrightarrow \forall x Qx) \quad \text{(III-27)}$$

9. Ley de contracción del cuantificador universal por la disyunción

$$(\forall x Px \vee \forall x Qx) \rightarrow \forall x(Px \vee Qx) \quad \text{(III-28)}$$

III.4 Leyes en logica de predicad

10. Ley de distribución del cuantificador particular por la conjunción

$$\exists x(Px \wedge Qx) \rightarrow (\exists x Px \wedge \exists x Qx) \quad \text{(III-2}$$

11. Ley de distribución del cuantificador particular por la disyunción

$$\exists x(Px \vee Qx) \leftrightarrow (\exists x Px \vee \exists x Qx) \quad \text{(III-3}$$

12. Ley de contracción del cuantificador particular por el condicional

$$(\exists x Px \rightarrow \exists x Qx) \rightarrow \exists x(Px \rightarrow Qx) \quad \text{(III-31}$$

Las recíprocas de 7), 8), 9), 10) y 12) no son ciertas en general

13. Ley de transitividad del condicional o ley del modo clásico del silogism "Barbara"[1]

$$(\forall x(Qx \rightarrow Rx) \wedge \forall x(Px \rightarrow Qx)) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Rx) \quad \text{(III-32}$$

14. Ley del modo clásico del silogismo "Celarent"

$$(\forall x(Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \forall x(Px \rightarrow Qx)) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow \neg Rx) \quad \text{(III-33}$$

15. Ley del modo clásico del silogismo "Darii"

$$(\forall x(Qx \rightarrow Rx) \wedge \exists x(Px \wedge Qx)) \rightarrow \exists x(Px \wedge Rx) \quad \text{(III-34}$$

16. Ley del modo clásico del silogismo "Ferio"

[1] Veamos varioas ejemplos de silogismos:.

Un ejemplo del silogismo «Barbara» es el siguiente razonamiento: Todos los hombres sor bípedos, todos los españoles son hombres, luego todos los españoles son bípedos.

Ejemplo del silogismo «Celarent» es: Ningún hombre es planta, todos los españoles sor hombres, luego ningún español es planta.

Ejemplo del silogismo «Darii» es: Todos los japoneses comen pescado, algunos yudoca son japoneses, luego algunos yudocas comen pescado

Ejemplo del silogismo «Ferio» es: Ningún filósofo es miope, algunos finlandeses sor filósofos, luego algunos finlandeses no son miopes

$(\forall x(Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \exists x(Px \wedge Qx)) \rightarrow \exists x(Px \wedge \neg Rx)$ (III-35)

17. Ley Modus Ponendo Ponens

$(\forall x(Px \rightarrow Qx) \wedge Pa) \rightarrow Qa$ (III-36)

18. Ley Modus Tollendo Tollens

$(\forall x(Px \rightarrow Qx) \wedge \neg Qa) \rightarrow \neg Pa$ (III-37)

19. Ley de inferencia de la alternativa

$(\forall x(Px \vee Qx) \wedge \neg Pa) \rightarrow Qa$ (III-38)

20. Ley de especificación

$\forall x Px \rightarrow Pa$ (III-39)

21. Ley de particularización

$Pa \rightarrow \exists x Px$ (III-40)

22. Ley de reducción al absurdo

$\forall x(\neg Px \rightarrow (Qx \wedge \neg Qx)) \rightarrow \forall x Px$ (III-41)

Todas estas leyes, escritas para predicados monádicos, se pueden generalizar para predicados poliádicos. Por ejemplo, la del modus ponendo ponens para diádicos es:

$(\forall xy(Pxy \rightarrow Qxy) \wedge Pab) \rightarrow Qab$ (III-42)

$\forall xy$ es $\forall x \forall y$, así como $\exists xy$ es $\exists x \exists y$, por convenio notacional.

De todas las leyes que se han enunciado anteriormente la que tiene más utilidad es la ley 19 de inferencia de la alternativa (III-38)

$(\forall x(Px \vee Qx) \wedge \neg Pa) \rightarrow Qa$ (III-43)

que el método de resolución utilizará como regla de resoluci
neralización poliádica de esta ley

$\forall x1 \ldots xn\, ((\neg Px1 \ldots xn \vee A) \wedge (Px1 \ldots xn \vee B)) \rightarrow A \vee B$ (

de A y B son sentencias cualesquiera.

Para x e y es:

$\forall xy\, ((\neg Pxy \vee A) \wedge (Pxy \vee B)) \rightarrow A \vee B$

5. SISTEMA INFERENCIAL DEL CÁLCULO DE PREDICADOS.

- El sistema de validación por tablas de verdad es poco útil en lógica de predicados.
  - no garantiza corrección para un universo más amplio.
- Si hay "n" predicados monádicos, es suficiente usar un universo de "2^n" eltos para probar la validez de la sentencia.
- No existe un procedimiento general que permita determinar la validez de cualquier sentencia en lógica de predicados.
- Existe un procedimiento para determinar si una sentencia es válida.
- Debido a los 2 últimos puntos se dice que la lógica de predicados es semidecidible.

REGLAS DE INFERENCIA

1. **REGLA DE ELIMINACIÓN DEL CUANTIFICADOR UNIVERSAL** - RE ∀-

$$\frac{\forall x P x}{P x} \quad o \quad \frac{\forall x_1 \ldots x_n \; P x_1 \ldots x_n}{P x_1 \ldots x_n}$$

[lo que es verdadero para todos los x, es verdadero para cualquiera de ellos]

RE ∀
$\forall x P x \Rightarrow P x)$

2. **REGLA DE INTRODUCCIÓN DEL CUANTIFICADOR UNIVERSAL** - RI ∀-

$$\frac{P x}{\forall x P x} \quad o \quad \frac{P x_1 \ldots x_n}{\forall x_1 \ldots x_n \; P x_1 \ldots x_n}$$

[Lo que es verdadero para cualquier x, es verdadero para todo x]

RI ∀
$P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$

3. **REGLA DE ELIMINACIÓN DEL CUANTIFICADOR PARTICULAR** - RE ∃-

$$\frac{\exists x P x}{P a} \quad o \quad \frac{\exists x_1 \ldots x_n \; P x_1 \ldots x_n}{P a_1 \ldots P a_n}$$

[si existe algún x que verifica P(x), es x es 'a' (= constante de Skolem) $\Rightarrow P a$]

RE ∃
$\exists x P(x) \wedge x = a \Rightarrow P(a)$

a = cte skolem

4. **REGLA DE INTRODUCCION DEL CUANTIFICADOR PARTICULAR** - RI ∃-

$$\frac{P a}{\exists x P x} \quad o \quad \frac{P a_1 \ldots a_n}{\exists x_1 \ldots x_n \; P x_1 \ldots x_n}$$

RI ∃
$P(a) \Rightarrow \exists x P(x) \quad x = a)$

[lo que es verdadero para un individuo es válido para alguien]

6. SISTEMA DE RESOLUCION

*** FORMA CLAUSULADA EN LÓGICA DE PREDICADOS (FORMA DE SKOLEM) ***

Para aplicar la regla de resolución es necesario que las sentencias estén en forma clausulada. Una sentencia está en forma de Skolem si

1) Solo posee cuantificadores universales y éstos están situados en cabeza. Todas las variables están universalmente cuantificadas, luego por convenio pueden eliminarse los cuantificadores.

2) La sentencia está compuesta por una conjunción de cláusulas. Una cláusula es una disyunción de literales negados o no.

CUALQUIER SENTENCIA PUEDE PASARSE A FORMA CLAUSULADA DE SKOLEM MEDIANTE 7 PASOS

Ejemplo: $\forall x(Px \rightarrow (\neg\exists y(Qxy \rightarrow \forall z Pz) \wedge \forall y(Qxy \rightarrow \exists t Rt))) \equiv$

$\neg\exists x Px \equiv \forall$

① Eliminación de condicionales y bicondicionales

$\equiv \forall x(\neg Px \vee (\neg\exists y(\neg Qxy \vee \forall z Pz) \wedge \forall y(\neg Qxy \vee \exists t Rt))) \equiv$

② Introducción de las negaciones de tal forma que sólo afecten a literales y no a fórmulas y añadir las relaciones (*en este caso las negaciones afectan solo a literales*) entre cuantificadores y negaciones.

$\equiv \forall x(\neg Px \vee (\forall y \neg(\neg Qxy \vee \forall z Pz) \wedge \forall y(\neg Qxy \vee \exists t Rt))) \equiv$

$\equiv \forall x(\neg Px \vee (\forall y(Qxy \wedge \exists z(\neg Pz)) \wedge \forall y(\neg Qxy \vee \exists t Rt))) \equiv$

Buscar los cuantificadores universales y en que sus variables estén independizadas

③ Independización de las variables cuantificadas de tal forma que cada cuantificador se refiere a su propia variable y no a ninguna otra sustituyendo los nombres de variables.

$\equiv \forall x(\neg Px \vee (\forall y(Qxy \wedge \exists z(\neg Pz)) \wedge (\forall w(\neg Qxw \vee \exists t Rt))) \equiv$

④ Eliminación de los cuantificadores existenciales

$\boxed{4\text{-A}}$ El cuantificador $\exists$ no está dentro del alcance de ningún cuantificador $\forall$.

Un ejemplo sería: $\exists x(Px \wedge Rmx)$

Se introduce la variable 'a' y se transforma en $Pa \wedge Rma$.

La variable a recibe el nombre de constante de Skolem.

$\boxed{4\text{-B}}$ El cuantificador $\exists$ está dentro del alcance de un cuantificador $\forall$.

Se sustituye la variable cuantificada por una función de Skolem.

Un ejemplo sería: $\forall yz \exists x(Pxy \vee Qxyz)$

Pasa a: $\forall yz(Pf(y,z)y \vee Qf(y,z)yz)$

En nuestro caso los cuantificadores existenciales no son afectados por el cuantificador universal, por tanto:

$\equiv \forall x(\neg Px \vee (\forall y(Qxy \wedge Pa)) \wedge (\forall w(\neg Qxw \vee Rb))) \equiv$

⑤ Eliminación de cuantificadores universales, se sitúan primero en cabeza:

$\equiv \forall xyw(\neg Px \vee ((Qxy \wedge Pa) \wedge (\neg Qxw \vee Rb))) \equiv$

$\equiv \neg Px \vee ((Qxy \wedge Pa) \wedge (\neg Qxw \vee Rb))$

⑥ Agrupamiento de conjunciones y disyunciones, aplicando la p. distributiva

$\equiv (\neg Px \vee Qxy) \wedge (\neg Px \vee Pa) \wedge (\neg Px \vee \neg Qxw \vee Rb)$

⑦ Instanciación, cambio de nombres de las variables para que cada cláusula tenga las suyas propias:

$\neg Px \vee Qxy$

$\neg Ps \vee Pa$

$\neg Pu \vee \neg Quw \vee Rb$

La regla de resolución en lógica de predicados se basa en la sustitución y la unificación.

PROCESO DE SUSTITUCIÓN Y UNIFICACIÓN

- Operación de sustitución

$L = Pa\underline{x}f(y)$

$S_1 = \{b/\underline{x}, c/y\} \Rightarrow L_{S_1} = Pabf(c)$

$S_2 = \{b/\underline{x}, g(z)/y\} \Rightarrow L_{S_2} = Pabf(g(z))$

- Sustitución vacía

$S = \{\} \Rightarrow L_S = L$

- Composición de sustituciones

Dadas S_1, S_2, S_1S_2 es una sustitución tal que $L_{S_1S_2} = (L_{S_1})_{S_2}$

Es asociativa pero no conmutativa (influye el orden)

- Unificación: dos expresiones son unificables si se pueden hacer idénticas aplicando alguna sustitución, a la que se denomina unificador.

- Un conjunto de literales es unificable si existe una sustitución s tal que $L_{1s} = L_{2s} = \dots = L_{ns}$ se dice que S es un unificador de $L = \{L_i\}$ y que los literales L_i se unifican en L_{is}

Ej.: sea $L_i = \{Paxf(y), Paxf(b)\}$.

$S = \{c/x, b/y\} \Rightarrow L_{is} = \{Pacf(b), Pacf(b)\}$ ambos literales se unifican en $Pacf(b)$.

$\theta = \{b/y\} \Rightarrow L_{i\theta} = \{Paxf(b), Paxf(b)\}$ ambos literales se unifican en $Paxf(b)$.

θ es el unificador mínimo o de máxima generalidad.

APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE SUSTITUCIÓN Y UNIFICACIÓN

Ej.: calcular el unificador más general para $W = \{Pa\underline{x}f(g(y)), Pa\underline{f(a)}f(u)\}$

W no se encuentra en forma mínima.

$S_1 = \{f(a)/x\} \Rightarrow W_{S_1} = \{Paf(a)f(\underline{g(y)}), Paf(a)f(\underline{u})\}$

$S_2 = \{u/g(y)\} \Rightarrow W_{S_1S_2} = \{Paf(a)f(u), Paf(a)f(u)\}$

$W_{S_1S_2}$ está en la forma mínima luego el unificador más general es

$\theta = S_1S_2 = \{f(a)/x, u/g(y)\}$

EXPRESIÓN GENERAL DE LA REGLA DE RESOLUCIÓN

1) Se selecciona una pareja de literales en cláusulas distintas.
2) Se aplica el algoritmo de unificación a la pareja de literales seleccionada.
3) Si resultan unificadas, se resuelven y se incluye la resolvente en el conjunto.
4) Volver a 1.

∗ REFUTACIÓN ∗

- Comprobar que el conjunto de cláusulas formado por las premisas más la conclusión negada constituye una contradicción
- Este hecho demuestra que la conclusión se infiere de las premisas.

La refutación con resolución y con búsqueda exhaustiva constituye un sistema inferencial consistente y comp siempre que la explosión combinatoria no sea excesivamente elevada.

Ejemplo de demostración por refutación

$P1: \neg Hx \vee Mx$ "Todos los hombres son mortales" $\forall x(Hx \to Mx) = \forall x(\neg Hx \vee Mx)$

$P2: HS$ "Sócrates es hombre" HS

$C: MS$ cte "Sócrates es mortal" cte MS

$P1: \neg Hx \vee Mx$

$P2: HS$

$\neg C: \neg MS$

$P1 = \{\neg Hx, Mx\}$ $p1 = \{Mx\}$ $p1 \cup \neg c = \{\neg Hx\}$ $\theta = \{S/x\}$

$\neg C = \{\neg MS\}$ $\neg c = \{\neg Ms\}$ $\{P1 - p1\}\theta \cup \{\neg C - \neg c\}\theta =$

$= \{\neg Hx, \cancel{Mx}\}\theta \cup \{\neg MS\} - \{\neg MS\}\theta =$

$= \{\neg Hs\}$

$P1 \cup \neg C \Rightarrow \neg Hs$

$P2 = \{HS\}$

$C1 = \{\neg HS\}$ $P2 \cup C1 = \lambda$

luego $P1 \wedge P2 \wedge \neg C$ es una contradicción, por tanto el razonamiento es correcto.

7. ESTRATEGIAS PARA ANALIZAR LA VALIDEZ DE PROPOSICIONES LÓGICAS (aplicación de la lógica de conjuntos)

1. $(p \to q) \vee (p \to \neg q)$

   $q \equiv V \Rightarrow$ 1ª disyunción verdadera $\Rightarrow V \vee ? \equiv V$

   $q \equiv F \Rightarrow$ 2ª disyunción verdadera $\Rightarrow ? \vee V \equiv V$ $\Rightarrow$ tautología

2. $P \subset Q \vee P \subset \bar{Q}$ se emplea la forma conjuntista

   $P = \{\text{Ingleses}\}$; $\bar{Q} = \{\text{Hombres}\}$ $\Rightarrow$ falsa

   $Q = \{\text{Mujeres}\}$; $U = Q \cup \bar{Q}$ = "conjunto de las personas"

3. $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$

   $q \equiv V \Rightarrow$ consecuente verdadero por serlo $(p \to q)$

   $q \equiv F \Rightarrow$ antecedente $\equiv p \to r$ y consecuente también $p \to r$ $\Rightarrow$ tautología

4. $\forall x(Px \to (Qx \vee Rx)) \to (\forall x(Px \to Qx) \vee \forall x(Px \to Rx))$

   forma conjuntista: $\Rightarrow$ falsa

   $P \subset (Q \cup R) \to ((P \subset Q) \vee (P \subset R))$

$\forall x (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx)$

Forma conjuntista: $\Rightarrow$ tautolo

$(P \subset Q) \rightarrow (P = U \rightarrow Q = U)$

$(P \subset Q \wedge P = U) \rightarrow Q = U$

$(\forall x Px \rightarrow \forall x Qx) \rightarrow \forall x (Px \rightarrow Qx)$

Forma conjuntista: $\Rightarrow$ falsa

$(P = U \rightarrow Q = U) \rightarrow P \subset Q$